www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

NOTATIONS ET OBJECTIFS DU PROBLÈME

Dans le problème $\mathbb{R}^2$ désigne l'espace euclidien de dimension 2 sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ est l'espace des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels, I est la matrice unité d'ordre 2. Une matrice $A = (A_{ij})$ étant donnée on note ${}^TA$ sa transposée définie par $({}^TA)_{ij} = A_{ji}$. Les éléments de $\mathbb{R}^2$ sont identifiés à des matrices-colonnes et si $X_i \in \mathbb{R}^2$ $(i = 1,2)$ le crochet $[X_1, X_2]$ désigne la matrice de première colonne X_1 et de deuxième colonne X_2. Dans ces conditions, on observera que si A est élément de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ on a $A[X_1, X_2] = [AX_1, AX_2]$. Pour toute matrice $A(t)$ à coefficients variables de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, on note $A'(t)$ ou $\frac{dA}{dt}(t)$ la matrice obtenue en dérivant au point t les coefficients de A (autrement dit : $(A'(t))_{ij} = A'_{ij}(t)$).

Les règles habituelles de dérivation s'étendent immédiatement aux fonctions matricielles de classe C^1. On a :

$$\frac{d(AB)}{dt} = \frac{dA}{dt}B + A\frac{dB}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\alpha A) = \alpha\frac{dA}{dt} + \frac{d\alpha}{dt}A,$$

(si α est une fonction numérique de classe C^1).

Un système différentiel de 2 équations à 2 inconnues :

$$\begin{cases} x_1' = ax_1 + bx_2 \\ x_2' = cx_1 + dx_2 \end{cases}$$

peut alors se mettre sous la forme matricielle $X' = AX$, $(X'(t) = AX(t),\ \forall t \in \mathbb{R})$ où

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

On note E, les deux vecteurs de la base canonique :

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dans le problème, on étudie des conditions sous lesquelles la résolution de certaines équations ou systèmes différentiels peut être ramenée à celle d'équations ou de systèmes à coefficients constants. La première partie est réservée aux équations différentielles linéaires du second ordre. La troisième partie étudie le cas de systèmes différentiels linéaires d'ordre 2 à coefficients continus. Dans cette troisième partie, la résolution de tels systèmes est ramenée au calcul d'exponentielles de matrices dont la définition et quelques propriétés sont établies dans la deuxième partie.

PREMIÈRE PARTIE

Dans cette partie, a et b sont deux fonctions données, a continûment dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, b continue sur cet intervalle I. On considère l'équation différentielle (1) du second ordre sur I :

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (1)$$

où y' et y'' désignent respectivement les dérivées première et seconde de la fonction inconnue y par rapport à la variable x.

1. Soit u une fonction de classe C^2 sur I, ne s'annulant pas dans I ; à *tout* y, solution de (1) sur I, on associe la fonction z de classe C^2 sur I définie par $y = uz$. Montrer que z vérifie une équation différentielle de la forme :

$$z'' + Az' + Bz = 0 \qquad (2)$$

sur I. On donnera les expressions de A et B en fonction de u, a, b et de certaines de leurs dérivées.

2. *a.* On suppose que A et B sont deux constantes α et β. Déterminer $\frac{u'}{u}$ et $\frac{u''}{u}$ en fonction de a, b, α et β.

   b. En déduire qu'une condition nécessaire pour que A et B soient constants s'écrit :

$$a' - 2b + \frac{a^2}{2} = \text{constante sur l'intervalle I.} \qquad (3)$$

   On exprimera cette constante en fonction de α et β.

   c. On suppose la condition (3) vérifiée. Montrer à l'aide des calculs précédents, qu'on peut trouver une fonction u de classe C^2 ne s'annulant pas sur I, telle que le changement de fonction inconnue $y = uz$ permette de ramener la résolution de (1) à celle d'une équation différentielle à coefficients constants.

3. *Application.*

   Résoudre les équations :

   a. $y'' + 2xy' + x^2y = 0$ sur $I = \mathbb{R}$.

   b. $y'' + 2y' \tan x + \frac{2}{\cos^2 x}y = 0$ sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Dans toute la suite du problème, A désigne une matrice carrée d'ordre 2 dont les coefficients sont des fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}$ (éventuellement de classe C^1 sur $\mathbb{R}$).

On rappelle que, le vecteur X_0 élément de $\mathbb{R}^2$ étant donné, il existe une fonction unique $t \mapsto X(t)$ dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, telle que :

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t),\ \forall t \in \mathbb{R} \\ X(0) = X_0. \end{cases}$$

DEUXIÈME PARTIE

On considère dans cette partie le système différentiel linéaire :

$$X' = AX \qquad (4)$$

où A est à coefficients *constants*.

Soient X_1 et X_2 les solutions de (4) qui vérifient respectivement $X_i(0) = E_i$ pour $i = 1,2$ (voir les notations des préliminaires).

On définit $\exp(tA)$ comme étant la matrice $[X_1(t), X_2(t)]$.

1. Calculer, *en utilisant cette seule définition*, la matrice $\exp(tA)$ dans les cas suivants :

   a. $A = \alpha I$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

   b. $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$;

   c. $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$;

2. Montrer que : $\frac{d}{dt}(\exp(tA)) = A\exp(tA)$.

3. On considère l'équation différentielle matricielle : $Z' = AZ$ (5)

   où Z est une matrice inconnue (2, 2) dont les coefficients sont des fonctions réelles continûment dérivables, et A une matrice réelle (2, 2) donnée à coefficients constants.

   a. Montrer que si X et Y sont solutions de (4), la matrice $[X, Y]$ est solution de (5).

Tournez la page S.V.P.

b. Réciproquement, si Z est une solution de (5), montrer que chacune de ses colonnes est solution de (4).

c. En déduire qu'étant donné $Z_0 \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ il existe *une et une seule solution* de (5) vérifiant $Z(0) = Z_0$. Quelle est cette solution pour $Z_0 = I$?

d. En déduire que si N est une matrice indépendante de t et nilpotente (c'est-à-dire telle que $N^2 = 0$) alors $\exp(tN) = I + tN$. (On pourra utiliser l'unicité de la solution de $Z' = NZ$, $Z(0) = I$).

4. Soit B appartenant à $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ et P une matrice inversible, indépendantes de t, telle que $A = PBP^{-1}$.

a. Montrer que :

$$\exp(tA) = P(\exp(tB))P^{-1}.$$

Pour cela, on utilisera $Z(t) = P(\exp(tB))P^{-1}$ et les questions 2 et 3.

b. Application.

Calculer $\exp(tA_1)$ et $\exp(tA_2)$ avec : $A_1 = \begin{bmatrix} 11 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

c. On suppose dans cette question que A admet deux valeurs propres réelles distinctes que l'on note λ_1 et λ_2.

Montrer que la matrice $\exp tA$ admet deux valeurs propres distinctes ; déterminer ces valeurs propres et comparer les espaces propres de $\exp tA$ à ceux de A. Calculer le déterminant de $\exp tA$ en fonction de la trace de A. Vérifier ces résultats avec A_1 (question *b*).

5. *a.* Soient A et B définies par : $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Calculer $\exp tA$, $\exp tB$, $\exp t(A+B)$.

b. Soient A et B deux matrices indépendantes de t, telles que $AB = BA$. Montrer que :

$$B\exp(tA) = (\exp(tA))B.$$

On pourra utiliser $Z_1(t) = (\exp(tA))B$, $Z_2(t) = B\exp tA$, et la question 3. En déduire que :

$$\exp t(A+B) = \exp(tA)\cdot\exp(tB) = \exp(tB)\cdot\exp(tA).$$

(On pourra dériver chacun des membres et utiliser les résultats précédents.)

c. Démontrer que $\exp(tA)$ est inversible d'inverse $\exp(-tA)$.

d. Montrer que si $\exp(tA) = \exp(tB)$ pour tout t, alors $A = B$.

e. On suppose que $A = \lambda I + N$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et N est nilpotente ; exprimer $\exp(tA)$ à l'aide de λ, t et N.

En déduire que si B est une matrice qui admet une valeur propre réelle double (notée λ), il en est de même pour $\exp(tB)$. Calculer cette valeur propre.

6. On considère les équations différentielles matricielles :

$$Z' = ZA, \quad \text{où} \quad \forall t \in \mathbb{R},\ Z(t) \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}). \tag{6}$$

Soit Z_0 un élément de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$. Montrer, en utilisant la transposition des matrices, qu'il existe une et une seule solution $t \mapsto Z(t)$ de (6) qui vérifie $Z(0) = Z_0$. Quelle est cette solution pour $Z_0 = I$?

En déduire que ${}^T(\exp(tA)) = \exp(t\,{}^TA)$.

Que peut-on en déduire pour $\exp tA$ lorsque A est symétrique (resp. antisymétrique) ?

TROISIÈME PARTIE

On considère maintenant des systèmes différentiels linéaires : $X' = AX$ (7)

où la fonction $t \mapsto A(t)$ est supposée de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $X(t) \in \mathbb{R}^2$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

1. Soit X une solution de (7) et soit Q une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ telle que, pour tout réel t, $Q(t)$ soit inversible. On pose $X = QY$. Trouver le système différentiel :

$$Y' = BY \tag{8}$$

vérifié par Y. On déterminera la matrice B en fonction de Q, A, Q^{-1} et Q'.

2. On suppose que, pour tout réel t, la matrice $A(t)$ est symétrique de valeurs propres $\lambda_1(t)$ et $\lambda_2(t)$, et qu'il existe une fonction $\theta : t \mapsto \theta(t)$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout t le vecteur de composantes $(\cos\theta(t), \sin\theta(t))$ soit vecteur propre de $A(t)$ associé à $\lambda_1(t)$.

a. Déterminer une matrice $t \mapsto P(t)$ telle que $\forall t$, $P(t)$ est orthogonale, $\det P(t) > 0$ et $(P^{-1}AP)(t)$ est diagonale.

b. Montrer que $(P^{-1}P')(t)$ est antisymétrique quel que soit t.

c. En déduire une condition suffisante portant sur λ_1, λ_2 et θ pour que, par un choix judicieux de Q, (8) soit à coefficients constants.

d. On suppose cette condition vérifiée. Montrer qu'il existe une matrice K constante et antisymétrique telle que $P(t) = (\exp tK)P(0)$. Exprimer à l'aide de K, B et de $X_0 = X(0)$ la solution X de (7).

e. Application.

Résoudre $X' = AX$, avec :

$$A = \begin{bmatrix} 11\cos^2 3t + \sin^2 3t & -5\sin 6t \\ -5\sin 6t & 11\sin^2 3t + \cos^2 3t \end{bmatrix}$$

3. On suppose à présent A quelconque. En écrivant :

$$A = 1/2(A + {}^TA) + 1/2(A - {}^TA),$$

on décompose A en la somme S + T d'une matrice S symétrique et d'une matrice T antisymétrique.

Soient $\theta : t \mapsto \theta(t)$ et $P : t \mapsto P(t)$ associées à S comme il est indiqué dans 2. (A étant remplacé par S.) On pose $X = PY$ où X et Y vérifient respectivement (7) et (8).

a. Montrer que si la matrice B dans (8) est constante alors :

1° Les valeurs propres de S sont constantes ;

2° $C = \theta' \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + T$ est constante.

b. Application.

On note ln le logarithme népérien.

Soit θ la fonction $t \mapsto (1/2)\ln(t^2+1)$. On considère la fonction matricielle $t \mapsto A(t)$ avec :

$$A(t) = \begin{bmatrix} \cos 2\theta(t) & \sin 2\theta(t) - \frac{t}{t^2+1} \\ \sin 2\theta(t) + \frac{t}{t^2+1} & -\cos 2\theta(t) \end{bmatrix}$$

Résoudre $X' = AX$.

4. Soit A la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix}$, où la fonction a est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et b est continue sur $\mathbb{R}$.

Soit Q la matrice $\begin{bmatrix} u & 0 \\ u' & u \end{bmatrix}$, où u est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, ne s'annulant pas.

On pose $X = QY$ où X et Y vérifient respectivement (7) et (8). Déterminer B en fonction de a, b, u et des dérivées de u.

Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a, b et a' pour que les coefficients de B dans (8) soient constants. Comparer avec les résultats de la première partie.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail